

Ceļa karte skolotājam

Matemātika I

Varbūtība un statistika I: 3. Kombinatorika un varbūtība

Ieteicamais laiks temata apguvei: 38 mācību stundas.

Temata apguves mērķis: pilnveidot prasmi pētīt kopas elementu un apakškopu sakārtojumus, noteikt to eksistenci, skaitu un īpašības. Padziļināt izpratni par gadījuma notikumu varbūtību un tās izmantošanu ar dažādām dzīves jomām saistītu procesu analīzei, t. sk., lietojot statistisko varbūtību un nosacīto varbūtību.

Sasniedzamie rezultāti

Ziņas	Prasmes
- Kopu nosaka: 1) uzskaitot visus kopas elementus, 2) uzrakstot formulu visu elementu noteikšanai. (M.Li.5.) - Kopu apvienojumu, šķēlumu, starpību izmanto, lai veidotu un pētītu kopas ar noteiktām īpašībām. Darbības ar kopām palīdz attēlot gan matemātiskas sakarības, gan modelēt reālas situācijas. (M.Li.5.) - Kombinatorikai raksturīgi jautājumi: vai eksistē elements ar noteiktām īpašībām, kā to iegūt, cik pavisam ir tādu elementu, kā iegūt tos visus. Risināšanai izmanto spriedumus, shēmas, grafus vai formulas. (M.Li.5.) - Skaitļa n faktoriāls ir visu naturālo skaitļu no 1 līdz n reizinājums. (M.Li.5.) - Izlase ir apakškopa ar noteiktām īpašībām. Nesakārtotām izlasēm (t. sk. kombinācijām) nav svarīga elementu secība, piemēram, $\{a; b\}$ un $\{b; a\}$ apzīmē vienu un to pašu nesakārtotu izlasi. Sakārtotām izlasēm (t. sk. variācijām, permutācijām) ir svarīga elementu secība, piemēram, $(a; b)$ un $(b; a)$ ir dažādas sakārtotas izlases. - No katras nesakārtotas izlases elementiem var izveidot sakārtotas izlases noteiktā skaitā. (M.Li.5.) - No konkrētā uzdevuma satura jāsecina, kādas izlases izmantot risinājumā – nesakārtotas vai sakārtotas. Izlašu skaitu var noteikt, spriežot vai lietojot atbilstošu formulu. (M.Li.2.; M.Li.5.) - Gadījuma mēģinājums (piemēram, monētas mešana) ir vienādos apstākļos veikta darbība/eksperiments, kuras iznākums iepriekš nav viennozīmīgi (precīzi) zināms; gadījuma mēģinājuma iznākumus sauc par notikumiem; notikuma varbūtības noteikšanai svarīgi noteikt iznākumu kopu. (M.Li.5.) - Kopas un darbības ar tām lieto, lai raksturotu notikumus (ar vienu un to pašu mēģinājumu saistītus) un noteiktu varbūtību notikumam, kas ir citu notikumu apvienojums, šķēlums vai starpība. (M.Li.5.) - Ar vienu mēģinājumu saistīti notikumi A un B ir nesavienojami, ja to iznākumu kopām nav kopīgu elementu; tad $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. (M.Li.5.)	- Raksturo īpašības, kas piemīt kopas visiem elementiem, definē/uzdod kopu ar visu elementu sarakstu vai ar formulu. - Nosaka un pamato kopas elementa vai apakškopas ar noteiktu īpašību eksistenci. - Nosaka galīgu vai bezgalīgu kopu apvienojumu, šķēlumu un starpību, darbības ar kopām attēlo ar Venna diagrammu. - Nosaka un skaidro vai pamato izlases veidu (sakārtota, nesakārtota) konkrētos piemēros, izmantojot izpratni par kontekstu. - Nosaka objektu/elementu, apakškopu/izlašu skaitu spriežot, veicot pilno pārslasi, veidojot grafu, lietojot reizināšanas likumu. - Aprēķina skaitļa faktoriālu, izpilda darbības ar faktoriāliem. - Lieto formulas variāciju, permutāciju un kombināciju skaita aprēķināšanai; t. sk., lai aprēķinātu notikuma varbūtību; skaidro formulu izvēli konkrētā uzdevuma atrisināšanai.

Ziņas	Prasmes
- Notikuma A varbūtība, ja notikums B ir realizējies, ir notikuma A nosacītā varbūtība; to apzīmē $P(A B)$. (M.Li.5.) - Divi notikumi A un B ir neatkarīgi, ja viena notikuma iestāšanās varbūtība neietekmē otra notikuma iestāšanos. (M.Li.5.) - Notikumu neatkarību var pamatot, izmantojot nosacīto varbūtību vai sakarību $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, kas patiesa, ja A, B – neatkarīgi notikumi. (M.Li.5.) - Ja gadījuma mēģinājums tiek veikts n reižu un notikums A iestājas k reižu, tad skaitli $\frac{n}{k}$ sauc par notikuma A relatīvo biežumu jeb statistisko varbūtību. Palielinot mēģinājumu skaitu n, notikuma A relatīvais biežums/statistiskā varbūtība stabilizējas ap konstantu skaitli – notikuma A varbūtību. (M.Li.5.) - Varbūtību teorijas metodes izmanto, lai raksturotu riskus (piemēram, nosakot apdrošināšanas iemaksas), iespējas (piemēram, analizējot pētījumus medicīnā), nodrošinātu kvalitātes kontroli (piemēram, izvērtējot brāķēto detaļu īpatsvaru) u. tml. (M.Li.5.)	- Konkrētos piemēros nosaka mēģinājumu iznākumu kopu, tās noteiktas apakškopas atbilstoši nosacījumiem. - Aprēķina notikumam A pretējo notikumu $\bar{A}$, izmantojot spriešanu vai sakarību $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. - Nosaka, attēlo ar Venna diagrammu divu notikumu apvienojumu, šķēlumu, starpību; izmanto darbības ar notikumiem, lai skaidrotu un aprēķinātu varbūtību. - Aprēķina relatīvo biežumu/statistisko varbūtību.

Komplekss sasniedzamais rezultāts	Ieradumi
- Izvēlas un argumentē kopas uzdošanas, informācijas attēlošanas veidu un risināšanas paņēmieni, lai noteiktu elementu, izlašu/kopu eksistenci, īpašības vai skaitu. (M.O.1.2.1.; M.O.5.1.1.; M.O.5.1.2.) - Konkrētos piemēros pēta, formulē un skaidro sakarības starp izlasēm, to skaitu, piemēram, saistību starp C_n^k un C_n^{n-k}, saistību starp C_n^k un A_n^k. (M.O.5.1.4.; M.O.5.1.5.; M.O.5.1.6.; M.O.2.3.1.; M.O.2.1.2.) - Raksturo notikumus (drošs, neiespējams, pretējs, nesavienojami u. tml.) un lieto darbības ar notikumiem vai formulas izlašu skaita aprēķināšanai, lai aprēķinātu varbūtību, t. sk. nesavienojamu notikumu apvienojuma varbūtību. (M.O.5.1.3.; M.O.5.1.6.; M.O.5.2.1.; M.O.5.2.2.; M.O.5.2.4.) - Konkrētos piemēros izmanto grafu un skaidro, kas ir nosacītā varbūtība, attēlo un raksturo saistību starp $P(B)$, $P(\bar{B})$, $P(A B)$, $P(\bar{A} B)$, $P(A \bar{B})$, $P(\bar{A} \bar{B})$ un to skaitliskajām vērtībām, formulē secinājumus. (M.O.5.2.5.) - Pamato, kāpēc dotie notikumi ir vai nav neatkarīgi, un aprēķina varbūtību, izmantojot nosacīto varbūtību vai lietojot varbūtību reizināšanas teorēmu. (M.O.5.2.6.) - Iegūst datus (t.sk. digitāli) un skaidro, kas ir notikuma absolūtais biežums/statistiskā varbūtība, formulē ar datiem pamatotus secinājumus, izmantojot doto vai aprēķināto statistisko varbūtību, tās saistību ar varbūtību. (M.O.5.2.3.)	- Veido dotās informācijas un risinājuma gaitas shematiskus attēlojumus, attīstot ieradumu plānot un vadīt savu domāšanas procesu, strukturēti un uzskatāmi attēlot informāciju. - Apzināti izvēlas izmantot spriešanu vai formulas izlašu skaita noteikšanai, attīstot ieradumu meklēt dažādus risinājumus, plānot un vadīt savu domāšanas procesu. - Izvērtē iegūto varbūtības skaitlisko vērtību, attīstot ieradumu kritiski izvērtēt rezultātu ticamību un atbilstību konkrētajai situācijai.
Jēdzieni: kopa, apakškopa, izlase, sakārtota izlase, nesakārtota izlase, kombinācijas, variācijas, permutācijas, skaitļa faktoriāls, gadījuma mēģinājums, notikums, nesavienojami notikumi, savienojami notikumi, nosacītā varbūtība, neatkarīgi notikumi, statistiskā varbūtība.	

Temata apguves norīse	Mācību materiāla autors/avots	Mācību materiāla nosaukums	Materiāls pieejams
Viss temats	Skola2030	3. Varbūtība un statistika I: Kombinatorika un varbūtība	https://mape.gov.lv/catalog/materials/D8C48730-8798-4F18-94CC-47F1AAC9F164/view
Kopas, darbības ar kopām	LU SIIC	3. Matemātiskie izteikumi, pierādījumi (Vizuālie materiāli)	https://www.siic.lu.lv/mat/IT/VM_M_10/index.html
		3. Matemātiskie izteikumi, pierādījumi (Atbalsta materiāli skolotājiem)	https://www.siic.lu.lv/datadir/matematika/registretieskolotaji/169.pdf
Kombinatorika	Tavaklase.lv	Kombinatorikas un varbūtību teorijas elementi (SURDO) (14. stunda)	https://www.tavaklase.lv/video/kombinatorikas-un-varbutibu-teorijas-elementi-surdo/
	LU SIIC	4. Kombinatorikas elementi (Atbalsta materiāli skolotājiem)	https://www.siic.lu.lv/datadir/matematika/registretieskolotaji/176.pdf
		4. Kombinatorikas elementi (Interaktīvais pašmācības disks skolēniem)	https://www.siic.lu.lv/mat/IT/M_11/default.aspx?tabid=17&id=300.html
Varbūtību teorijas elementi	Tavaklase.lv	Varbūtību teorijas pamatjēdzieni	https://www.tavaklase.lv/video/varbutibu-teorijas-pamatjedzieni/
		Kombinatorikas un varbūtību teorijas elementi (SURDO) (14. stunda)	https://www.tavaklase.lv/video/kombinatorikas-un-varbutibu-teorijas-elementi-surdo/
	LU SIIC	5. Varbūtību teorijas elementi (Interaktīvais pašmācības disks skolēniem)	https://www.siic.lu.lv/mat/IT/M_11/default.aspx?tabid=17&id=400.html
		5. Varbūtību teorijas elementi (Atbalsta materiāli skolotājiem)	https://www.siic.lu.lv/datadir/matematika/registretieskolotaji/175.pdf

Izdevniecību atbalsts:

- DZM atbalsta materiāli matemātikā 10.–12. klasei. <https://app.soma.lv/e-gramatas/book/matematika-ec71b580-2343-4a48-b3cf-cf3d9672e449>
- Āboltiņa, B., Kriķis, D., Šteiners, K. *Matemātika 10. klasei*. Rīga: Zvaigzne ABC. 2011. 288 lpp.
- Āboltiņa, B., Kriķis, D., Šteiners, K. *Matemātika 11. klasei*. Rīga: Zvaigzne ABC. 2012. 336 lpp.
- Kriķis, D., Zariņš, P., Ziobrovskis, V. *Diferencēti uzdevumi matemātikā. 2. daļa*. Rīga: Zvaigzne ABC. 1996. 392 lpp.
- Kriķis, D., Zariņš, P., Ziobrovskis, V. *Diferencēti uzdevumi matemātikā. 2. daļa*. Rīga: Zvaigzne ABC. 1996. 224 lpp.
- Kriķis, D., Šteiners, K., *Algebra 10.–12. klasei. 1. daļa. Pamatkursam un profilkursam*. Rīga: Zvaigzne ABC. 1998. 144 lpp.
- Kriķis, D., Šteiners, K., *Algebra 10.–12. klasei. 3. daļa. Pamatkursam un profilkursam*. Rīga: Zvaigzne ABC. 1999. 136 lpp.
- Kriķis, D., Šteiners, K., *Algebra 10.–12. klasei. 4. daļa. Pamatkursam un profilkursam*. Rīga: Zvaigzne ABC. 1999. 220 lpp.
- Šteiners, K., *Algebra 10.–12. klasei. 5. daļa*. Rīga: Zvaigzne ABC. 2000. 180 lpp.
- Kriķis, D., Šteiners, K., *Algebra 10.–12. klasei. 6. daļa*. Rīga: Zvaigzne ABC. 2001. 240 lpp.
- Slokenberga, E., France, Inga, France, Ilze. *Matemātika 10. klasei*. Lielvārds. 2009. 279 lpp.
- Slokenberga, E., France, Inga, France, Ilze. *Matemātika 11. klasei*. Lielvārds. 2010. 320 lpp.
- Slokenberga, E., France, Inga, France, Ilze. *Matemātika 12. klasei*. Lielvārds. 2011. 255 lpp.
- Andžāns, A., Zariņš, P. *Matemātiskās indukcijas metode un varbūtību teorijas elementi*. Rīga: Zvaigzne. 1983. 184 lpp.